Санкт-Петербургский государственный университет

Кафедра математической теории моделирования систем управления

Ежова Екатерина Викторовна

Выпускная квалификационная работа бакалавра

О РАЗРЕШИМОСТИ В ЯВНОМ АНАЛИТИЧЕСКОМ ВИДЕ ОДНОЙ ФИЛЬТРОВОЙ ЗАДАЧИ

Направление 010400

Прикладная математика и информатика

Научный руководитель,
кандидат физ.-мат. наук,
доцент Тамасян Г. Ш.

Рецензент,
доктор физ.-мат. наук,
профессор Утешев А. Ю.

Санкт-Петербург

2017

Содержание

Введение

Задача полиномиальной фильтрации естественным образом возникает во многих задачах прикладной математики. Фильтры в виде полиномов используются для «очистки» входящего сигнала, например, от шума (при анализе электрических сигналов), исключения случайных выбросов (при обработке статистических данных) или уменьшения составляющей шума для дальнейшего анализа изображений.

В данной работе формально поставлена полиномиальная фильтровая задача размерности четыре, приведены требуемые вспомогательные определения и теоретические сведения, исследован вопрос о возможности получения решения рассматриваемой задачи в явном аналитическом виде.

Все вычисления были проведены в программном пакете Maple. С помощью математической программы Geogebra были получены графики и анимации, которые являются геометрической иллюстрацией задачи.

Постановка задачи

Пусть заданы вещественные параметры

$$b < -1, \quad a > 1, \quad M > 0, \quad A.$$

Рассмотрим задачу условной оптимизации

$$P_4(x, b) \to \max, \tag{1}$$

$$|P_4(x, t)| \leqslant M, \quad t \in [-1, 1], \tag{2}$$

$$P_4(x, a) = A, \tag{3}$$

где

$$P_4(x, t) = x_0 t^4 + x_1 t^3 + x_2 t^2 + x_3 t + x_4. \tag{4}$$

Задача (1)–(3) называется фильтровой полиномиальной задачей. В таком виде задачи для полиномов степени $n = \overline{1, 4}$ ставились в [1, 2, 3]. Вектор коэффициентов $x = (x_0, \ldots, x_4)$ полинома $P_4(x, t)$, удовлетворяющего ограничениям задачи (1)–(3), назовём *планом.* Множество планов обозначим $\Omega \subset \mathbb{R}^5$.

При фиксированных параметрах A, a, M рассматриваемая задача была поставлена и решена для полинома произвольной степени n Золотарёвым Егором Ивановичем (см. [4]). Им было найдено дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет решение поставленной задачи. Решение было получено с помощью эллиптических функций, но в силу сложности работы с подобными функциями, возникает вопрос о возможности получения решения в более доступном виде — полиномиальном.

В работах [1, 2] решены полиномиальные фильтровые задачи для $n = \overline{1, 3}$. В данной работе будет исследована возможность получения решения в явном аналитическом виде при $n = 4$.

Глава 1. Вспомогательные сведения

Прежде всего дадим определение важному для решения задачи понятию альтернанс, приведённому в [5].

Определение. Альтернансом функции $g(x)$ на отрезке $[-1, 1]$ называется такой набор точек

$$-1 \leqslant x_1 < x_2 < ... < x_N \leqslant 1,$$

в которых

$$|g(x_i)| = M, \quad i \in 1 : N,$$

$$g(x_i) = -g(x_{i-1}), \quad i \in 2 : N.$$

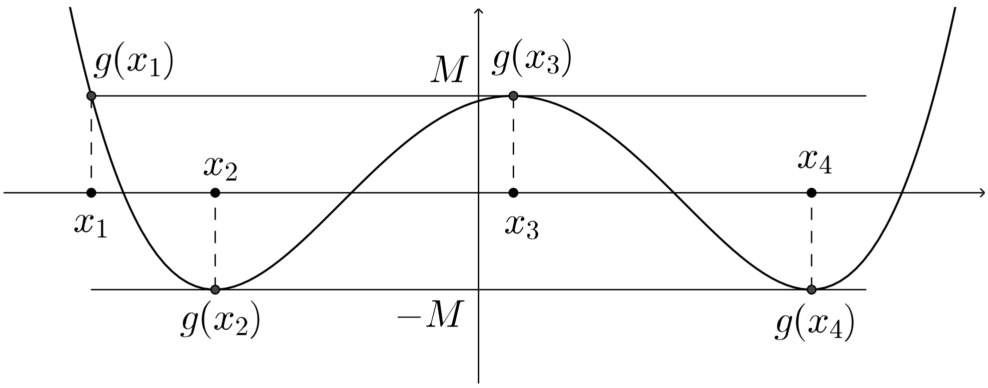


Рис. 1: Геометрическая интерпретация понятия альтернанс

Важную роль для дальнейшего анализа играют полиномы Чебышёва, которые на отрезке $[-1, 1]$ допускают представление

$$T_n(t) = \cos(n \arccos(t))$$

и обладают следующим свойством: среди всех полиномов степени n, не превосходящих на отрезке $[-1, 1]$ по модулю величины $M > 0$, наибольшее значение в точке $t = a$ при $a > 1$ принимает полином $MT_n(t)$. Кроме того полином $MT_n(t)$ обладает полным альтернансом, т. е. границы отрезка $[-1, 1]$, на котором рассматривается задача, являются точками альтернанса. История возникновения полиномов Чебышёва, их свойства, применение и другие вопросы, связанные с ними, подробно изложены в [6].

В данной работе непосредственно используются полиномы Чебышёва третьей и четвёртой степени

$$T_3(t) = 4t^3 - 3t, \qquad T_4(t) = 8t^4 - 8t^2 + 1.$$

Определим следующие величины

$$A_3 = MT_3(a), \qquad A_4 = MT_4(a).$$

В [7] изучались альтернансные свойства решения фильтровой задачи в зависимости от параметра A для общего случая, полинома степени n. Приведём необходимые для решения поставленной задачи (1)–(3) результаты, с доказательствами которых можно ознакомиться в указанной работе.

Утверждение 1. При $A \in [-A_4, A_4]$ решение задачи (1)–(3) существует и единственно. В граничных точках отрезка A_4 и $-A_4$ решением являются полиномы $MT_4(t)$ и $-MT_4(t)$ соответственно.

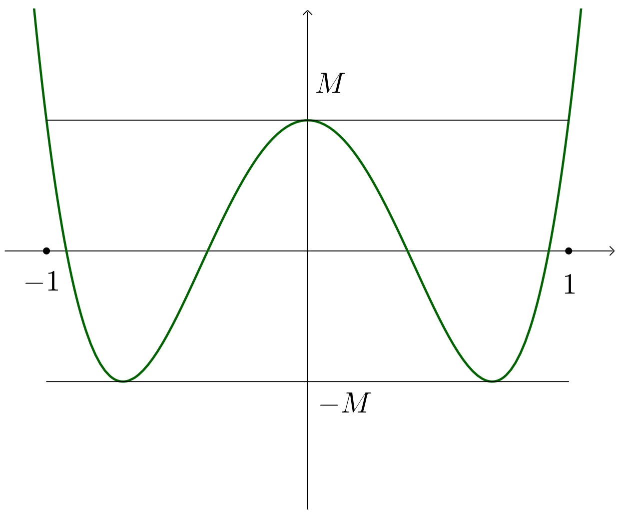


Рис. 2: Полином $MT_4(t)$

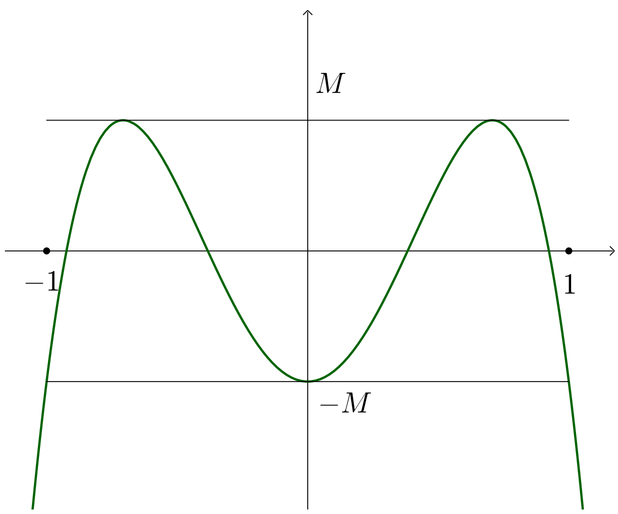


Рис. 3: Полином $-MT_4(t)$

Утверждение 2. Для того чтобы план $x^* \in \Omega$ был оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы полином $P_4(x^*, t)$ обладал четырёхточечным альтернансом, т. е. чтобы нашлись четыре точки

$$-1 \leqslant t_1 < t_2 < t_3 < t_4 \leqslant 1,$$

в которых выполняются равенства

$$\begin{aligned} &P_4(x^*, t_1) = M, \quad P_4(x^*, t_2) = -M, \\ &P_4(x^*, t_3) = M, \quad P_4(x^*, t_4) = -M. \end{aligned} \tag{5}$$

В следующих утверждениях приведены случаи, когда решение задачи (1)–(3) может быть записано в явном виде, что дает возможность получить представление о том, каким образом меняется оптимальный полином ещё до проведения полного анализа задачи, а также эти сведения можно использовать для проверки корректности получаемых результатов.

Утверждение 3. Справедлива формула

$$P_4(x^*(-A_3), t) = -MT_3(t).$$

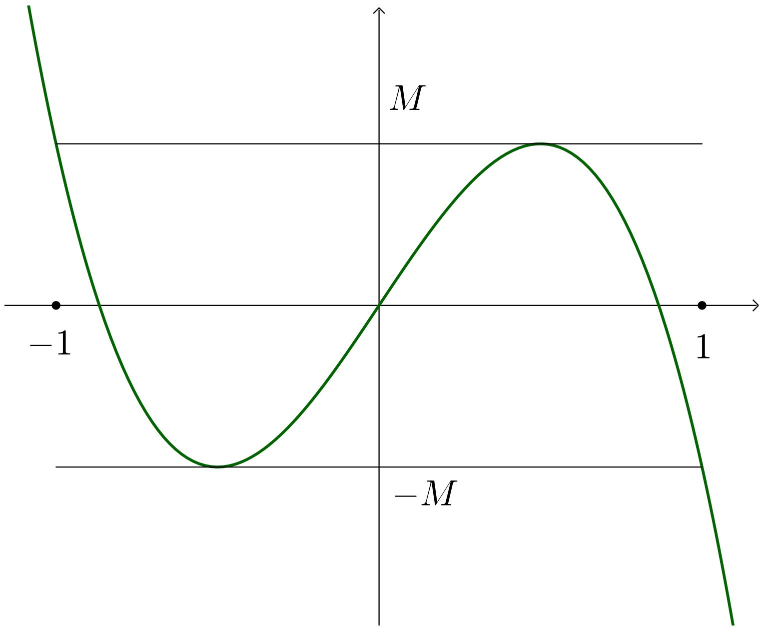


Рис. 4: Полином $-MT_3(t)$

Обозначим $\tau = \cos\dfrac{\pi}{4}$ и рассмотрим два полинома

$$V_4(\tau,t) = MT_4\left(\frac{1+\tau}{2}t - \frac{1-\tau}{2}\right), \quad \Lambda_4(\tau,t) = MT_4\left(\frac{1+\tau}{2}t + \frac{1-\tau}{2}\right).$$

Положим

$$\check{A}_4 = V_4(\tau,a), \quad \hat{A}_4 = \Lambda_4(\tau,a).$$

Утверждение 4. Единственным решением задачи (1)–(3) в точке $\check{A}_4$ является полином $V_4(\tau,t)$, в точке $-\hat{A}_4$ — полином $-\Lambda_4(\tau,t)$.

Утверждение 5. При $A \in (-\hat{A}_4, \check{A}_4)$ оба конца отрезка $[-1,1]$ являются точками альтернанса.

Приведём явную запись полиномов $V_4(\tau,t), -\Lambda_4(\tau,t)$ и их геометрическую иллюстрацию.

$$V_4(t) = \frac{M}{8}\Big[\left(17+12\sqrt{2}\right)t^4 + \left(-12-8\sqrt{2}\right)t^3 + \left(-18-16\sqrt{2}\right)t^2 + \\ + \left(8\sqrt{2}+4\right)t + 4\sqrt{2}+1\Big],$$

$$-\Lambda_4(t) = -\frac{M}{8}\Big[\left(17+12\sqrt{2}\right)t^4 + \left(12+8\sqrt{2}\right)t^3 + \left(-18-16\sqrt{2}\right)t^2 + \\ + \left(-8\sqrt{2}-4\right)t + 4\sqrt{2}+1\Big].$$

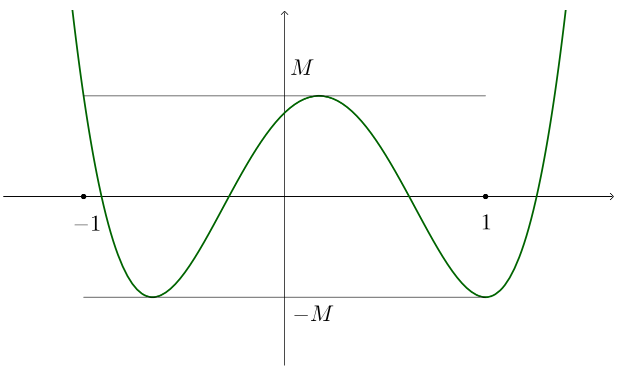


Рис. 5: Полином $V_4(t)$

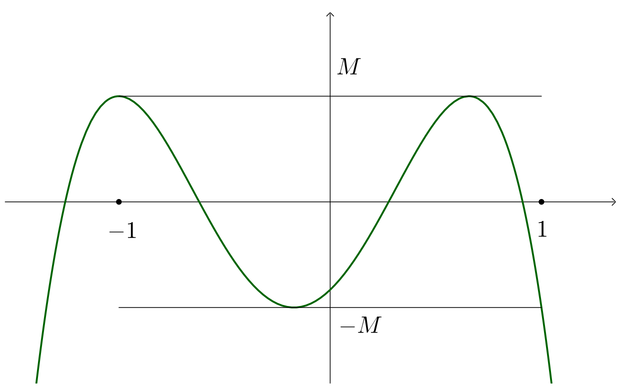
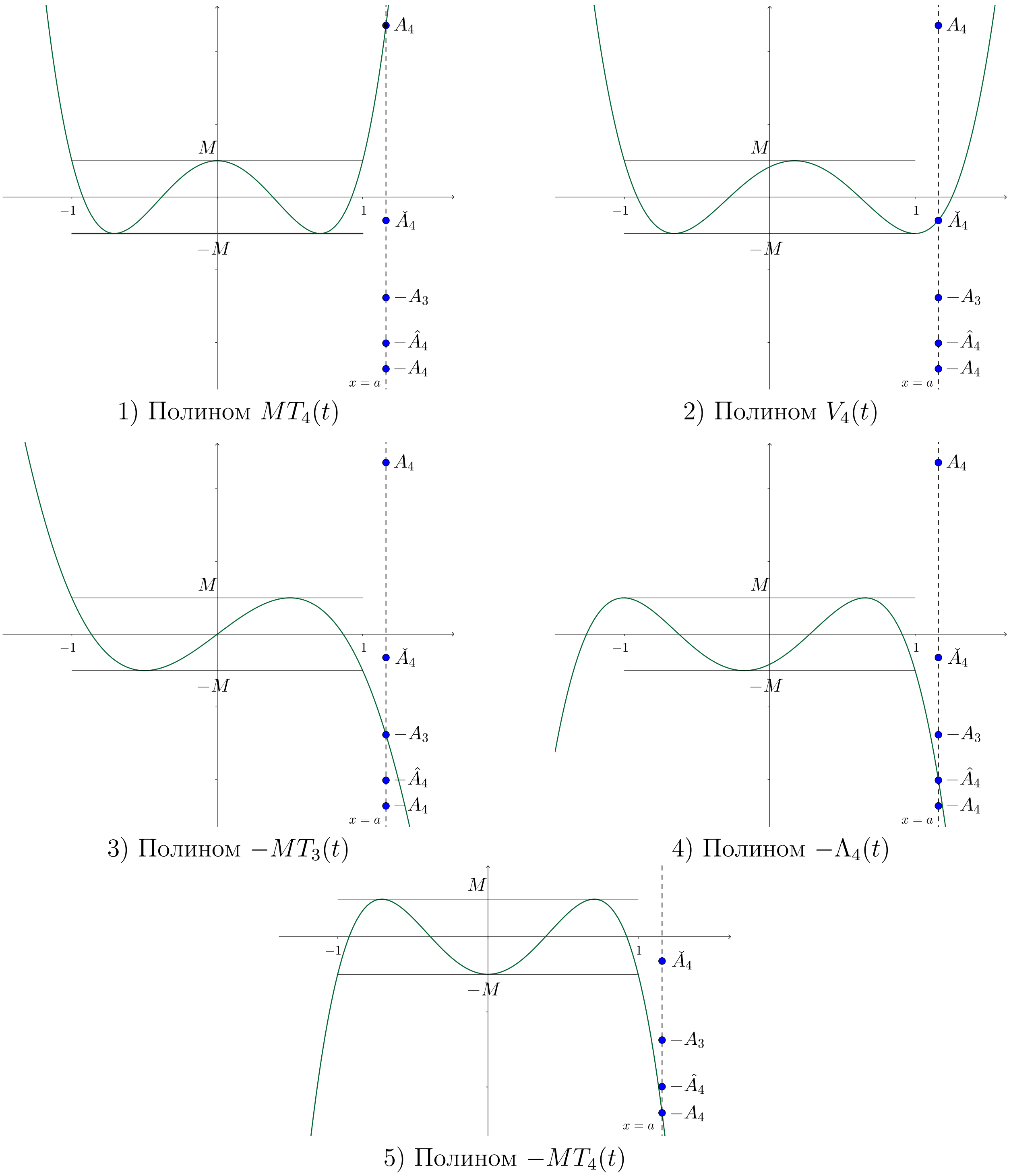


Рис. 6: Полином $-\Lambda_4(t)$

Глава 2. Решение

Из утверждений $1, 3$ и 4 можно получить представление о том, как изменяется оптимальный полином в зависимости от параметра A, а также как соотносятся между собой значения параметров $M, A_4, A_3, \check{A}_4$ и $-\hat{A}_4$. Проиллюстрируем этапы изменения искомого полинома.



1) Полином $MT_4(t)$ 2) Полином $V_4(t)$

3) Полином $-MT_3(t)$ 4) Полином $-\Lambda_4(t)$

5) Полином $-MT_4(t)$

Рис. 7: Этапы изменения оптимального полинома

В зависимости от того, какое значение принимает параметр a, будет верно одно из следующих неравенств:

$$-A_4 < -\hat{A}_4 < -A_3 < -M < \check{A}_4 < M < A_4,$$
$$-A_4 < -\hat{A}_4 < -A_3 < -M < M \leqslant \check{A}_4 < A_4.$$

Утверждение 2 позволяет найти явный вид оптимального полинома $P_4(x^*, t)$. Эта задача решается в два этапа. На первом этапе построим однопараметрическое семейство полиномов четвёртой степени, обладающих на отрезке $[-1, 1]$ четырёхточечным альтернансом, используя условие (5). На втором этапе выделим из этого семейства полином, удовлетворяющий условию (3). Такой полином и будет решением задачи (1)–(3).

Пусть c, d, e — вещественные числа, попарно неравные друг другу. Рассмотрим некоторое сужение семейства полиномов (4)

$$P_4(x,t) = x_0t^4 - \frac{4}{3}x_0(c+d+e)t^3 + 2x_0(cd+ce+de)t^2 - 4x_0cdet + h. \quad (6)$$

Здесь

$$P_4'(x,t) = 4x_0(t-c)(t-d)(t-e),$$

т. е. коэффициенты полинома выбраны таким образом, чтобы его производная обращалась в ноль в точках c, d, e, следовательно c, d, e — точки локального экстремума. Будем считать, что c — точка локального минимума, d — точка локального максимума, e — точка локального экстремума, меняющая свою характеристику.

С помощью условия (5) в семействе (6) выделим однопараметрическое семейство полиномов, обладающее на отрезке $[-1, 1]$ четырёхточечным альтернансом. В качестве параметра возьмём d.

Отметим, что в точках альтернанса, принадлежащих интервалу $(-1, 1)$, производная $P'(x, t)$ должна обращаться в нуль. Это значит, что внутренними точками альтернанса могут быть только $t = c$, $t = d$, $t = e$. Для получения четырёхточечного альтернанса следует привлекать концы отрезка $[-1,1]$.

Рассмотрим четыре случая возможного расположения точек c, d, e относительно отрезка $[-1,1]$:

$$1)\ -1 < c < d < e \leqslant 1, \qquad 2)\ -1 < c < d < 1 < e,$$

$$3)\ e < -1 < c < d < 1, \qquad 4)\ -1 \leqslant e < c < d < 1.$$

Далее подробно исследуем каждый случай.

2.1. Первый случай

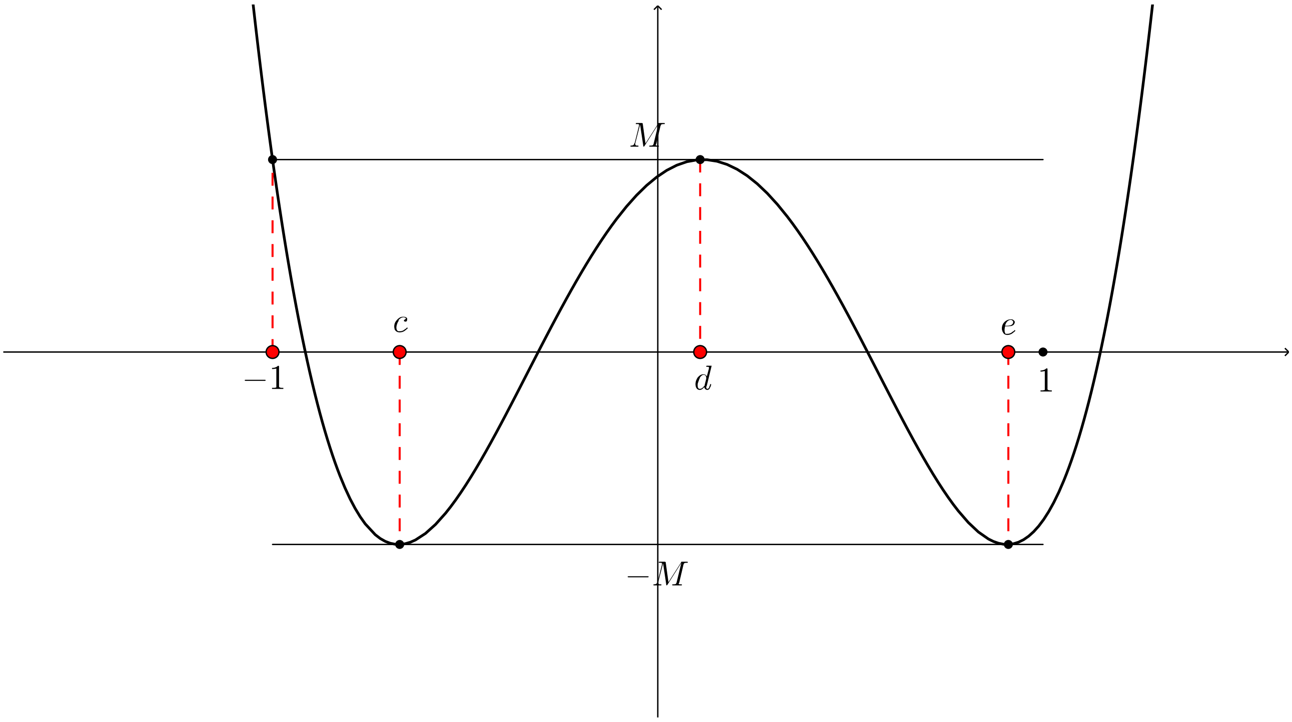


Рис. 8: Случай расположения точек локального экстремума $-1 < c < d < e \leqslant 1$

Первый этап решения. В первом случае точками альтернанса будут

$$t_1 = -1, \quad t_2 = c, \quad t_3 = d, \quad t_4 = e.$$

Сразу можно отметить, что под этот случай подпадают полиномы $MT_4(t)$ и $V_4(t)$, определённые в главе 1.

Альтернансные условия (5) принимают вид

$$P_4(x, -1) = M, \quad P_4(x, c) = -M, \quad P_4(x, d) = M, \quad P_4(x, e) = -M.$$

Запишем подробно эту систему

$$\begin{cases} x_0 + \dfrac{4}{3}x_0(c+d+e) + 2x_0(cd+ce+de) + 4x_0cde + h = M, & (7) \\ x_0c^4 - \dfrac{4}{3}x_0(c+d+e)c^3 + 2x_0(cd+ce+de)c^2 - 4x_0c^2de + h = -M, & (8) \\ x_0d^4 - \dfrac{4}{3}x_0(c+d+e)d^3 + 2x_0(cd+ce+de)d^2 - 4x_0cd^2e + h = M, & (9) \\ x_0e^4 - \dfrac{4}{3}x_0(c+d+e)e^3 + 2x_0(cd+ce+de)e^2 - 4x_0cde^2 + h = -M. & (10) \end{cases}$$

Вычитая (10) из (8) и факторизуя выражение, получим

$$-\frac{1}{3}x_0(c-e)^3(c-2d+e)=0.$$

Отсюда выражение c в зависимости от d и e

$$c=2d-e.$$

Подставляя это выражение в (8) и (9), получим систему двух линейных уравнений относительно x_0 и h

$$\begin{cases}\left(4de^3-e^4-4d^2e^2\right)x_0+M+h=0,\\ \left(-4d^3e+2d^2e^2+d^4\right)x_0-M+h=0.\end{cases}$$

Данная система имеет единственное решение

$$x_0=\frac{2M}{(d-e)^4},\quad h=-\frac{M\left(-4d^3e-2d^2e^2+d^4-e^4+4de^3\right)}{(d-e)^4}.$$

Подставляя выражения для x_0 и h в (7), получим

$$-\frac{2M(d+1)^2\left(d^2-4de-2d-1+2e^2\right)}{(d-e)^4}=0.$$

Откуда решая относительно e квадратное уравнение

$$d^2-4de-2d-1+2e^2=0,$$

получим

$$e=d+\frac{\sqrt{2}}{2}d+\frac{\sqrt{2}}{2}. \tag{11}$$

Второе решение этого уравнения $d-\dfrac{\sqrt{2}}{2}d-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ не подходит, так как при подставновке $d=0$, которое соответствует полиному $MT_4(t)$, получим отрицательное значение для параметра e, что противоречит тому, что $e > d \geqslant 0$.

Теперь можем выразить величины c, x_0, h через единственный параметр d

$$c = d - \frac{\sqrt{2}}{2}d - \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad x_0 = \frac{8M}{(d+1)^4},$$

$$h = -\frac{M\left(-d^2 + 6d + 4\sqrt{2}d + 3 + 2\sqrt{2}\right)\left(d^2 - 6d + 4\sqrt{2}d - 3 + 2\sqrt{2}\right)}{(d+1)^4}.$$

Определим границы изменения параметра d. По условию $e \leqslant 1$, следовательно, из (11) получаем $d \leqslant 3 - 2\sqrt{2}$. Из утверждения 1 мы знаем, на каком промежутке существует решение задачи и её решение на границах этого промежутка. В рассматриваемом случае граничным решением будет полином $MT_4(t)$, точкой локального максимума которого является значение $d = 0$. Таким образом, в первом случае $d \in \left[0, 3 - 2\sqrt{2}\right]$.

Остаётся подставить все полученные выражения для параметров c, e, x_0, h в (6). Таким образом, получено однопараметрическое семейство полиномов четвёртой степени, обладающих на отрезке $[-1, 1]$ четырёхточечным альтернансом при $d \in \left[0, 3 - 2\sqrt{2}\right]$

$$P_{41}(x(d), t) = \frac{M}{(d+1)^4}\Big[8t^4 - 32dt^3 + \left(40d^2 - 16d - 8\right)t^2 + \\ + \left(-16d^3 + 32d^2 + 16d\right)t + d^4 - 12d^3 - 2d^2 + 4d + 1\Big], \quad (12)$$

единица в индексе «41» указывает на то, что такой вид имеет полином в первом случае. Отметим, что значения полинома $P_{41}(x(d), t)$ на концах отрезка области изменения параметра d принимают вид

$$P_{41}(x(0), t) = MT_4(t),$$

$$P_{41}(x(3 - 2\sqrt{2}), t) = \frac{M(17 + 12\sqrt{2})}{8}\left(t^2 + 2t\left(2\sqrt{2} - 3\right) + 13 - 10\sqrt{2}\right) \times \\ \times \left(t^2 + 2t\left(2\sqrt{2} - 3\right) + 2\sqrt{2} - 3\right).$$

После несложных преобразований можно заметить, что

$$P_{41}(x(3-2\sqrt{2}),t) = V_4(t).$$

Второй этап решения. На втором этапе используем условие (3), чтобы получить зависимость всех параметров и самого полинома от параметра A.

Подставляя $t = a$ в (12) и приравнивая к A, получим

$$(M-A)\,d^4 + (-4A + M(-16a-12))d^3 + \left(-6A + M\left(40a^2+32a-2\right)\right)d^2 + \\ + \left(-4A + M\left(-32a^3-16a^2+4+16a\right)\right)d + M\left(8a^4-8a^2+1\right) - A = 0. \tag{13}$$

Решим это уравнение относительно d. Теоретические сведения о решении уравнений третьей и четвёртой степени подробно изложены в [8].

В случае $M = A$ получим уравнение третьей степени

$$d^3 + \left(-\frac{5}{2}a + \frac{1}{2}\right)d^2 + \left(2a^2 - a\right)d - \frac{1}{2}a^3 + \frac{1}{2}a^2 = 0.$$

Оно имеет три решения, учитывая, что $d \in \left[0, 3-2\sqrt{2}\right]$ и $a > 1$, имеем в случае $A = M$

$$d = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}.$$

При $A \neq M$ (13) можем поделить на коэффициент при d^4 и перейти к уравнению

$$d^4 + \frac{12M + 4A + 16Ma}{A-M}d^3 + \frac{6A - 40Ma^2 - 32Ma + 2M}{A-M}d^2 +$$

$$+\frac{-16Ma + 4A + 32Ma^3 + 16Ma^2 - 4M}{A-M}d + \frac{A - 8Ma^4 + 8Ma^2 - M}{A-M} = 0.$$

Обозначим b_1 коэффициент при d^3, делая замену переменных

$x = d - \dfrac{b_1}{4}$, придём к неполному уравнению четвёртой степени

$$x^4 + p_1 x^2 + q_1 x + r_1 = 0,$$

где

$$p_1 = -\frac{8M(1+a)^2(5A+7M)}{(A-M)^2}, \quad q_1 = \frac{32M(1+a)^3(A+7M)(A+M)}{(A-M)^3},$$

$$r_1 = -\frac{8M(1+a)^4(51AM^2+13A^2M+31M^3+A^3)}{(A-M)^4}.$$

Далее составим резольвенту Феррари

$$y^3 + b_2 y^2 + c_2 y + d_2 = 0,$$

где

$$b_2 = -p_1 = \frac{8M(1+a)^2(5A+7M)}{(A-M)^2},$$

$$c_2 = -4r_1 = \frac{32M(1+a)^4(51AM^2+13A^2M+31M^3+A^3)}{(A-M)^4},$$

$$d_2 = 4p_1 r_1 - q_1^2 = \frac{256M^2(1+a)^6(3M+A)(7M^3+19AM^2+5A^2M+A^3)}{(A-M)^6}.$$

Делая в резольвенте замену переменных $y = z - \dfrac{b_2}{3}$, придём к неполному уравнению третьей степени

$$z^3 + p_2 z + q_2 = 0,$$

где

$$p_2 = \frac{32}{3}\frac{M(1+a)^4(3A-5M)}{(A-M)^2}, \quad q_2 = \frac{512}{27}\frac{M^2(1+a)^6(9A-7M)}{(A-M)^3},$$

дискриминант которого

$$D = \frac{32768}{27} \frac{M^3(1+a)^{12}(A+M)^2}{(A-M)^5}.$$

Его знак зависит от значений параметров A и M:
если $M < A < A_4$, то $D > 0$ и уравнение имеет один вещественный корень;
если $-M < A < M$, то $D < 0$ и уравнение имеет три вещественных корня.

Случай $M < A < A_4$**.** В этом случае $q_2 < 0$, тогда единственный корень ищем как сумму

$$z = u_1 + v_1,$$

где

$$u_1 = \sqrt[3]{-\frac{q_2}{2} + \sqrt{D}}, \quad v_1 = -\frac{p_2}{3u_1}.$$

И после замены переменных корень резольвенты Феррари имеет вид

$$y_1 = u_1 + v_1 - \frac{b_2}{3}.$$

Теперь используем этот корень резольвенты для нахождения корня исходного уравнения (13), который вычисляется по формуле

$$d = \frac{-K_1 + \sqrt{K_1^2 - 4\left(\frac{y_1}{2} + L_1\right)}}{2} - \frac{b_1}{4},$$

где

$$K_1 = \sqrt{y_1 - p_1}, \quad L_1 = -\frac{q_1}{2K_1}.$$

Случай $-M < A < M$**.** В этом случае дискриминант $D < 0$, воспользуемся тригонометрическими формулами для нахождения корней кубической резольвенты.

Определим вспомогательный угол

$$\varphi = \arccos \frac{3q_2}{2p_2}\sqrt{-\frac{3}{p_2}},$$

тогда один из корней резольвенты вычисляется по формуле

$$y_2 = 2\sqrt{-\frac{p_2}{3}}\cos\frac{\varphi}{3} - \frac{b_2}{3},$$

с помощью него найдём корень исходного уравнения (13)

$$d = \frac{-K_2 - \sqrt{K_2^2 - 4\left(\frac{y_2}{2} + L_1\right)}}{2} - \frac{b_1}{4},$$

где

$$K_2 = \sqrt{y_2 - p_1}, \quad L_2 = -\frac{q_1}{2K_2}.$$

Случай $A < -M$ невозможен, так как тогда полином принимает в точке a значение меньшее чем во всех точках отрезка $[-1, 1]$, а это противоречит тому, что все точки локального экстремума c, d, e лежат в этом отрезке.

Таким образом, для первого случая задача полностью решена, подставляя полученные выражения для d в полином (12), все его коэффициенты выражаются через параметры A, a, M задачи (1)–(3).

2.2. Второй случай

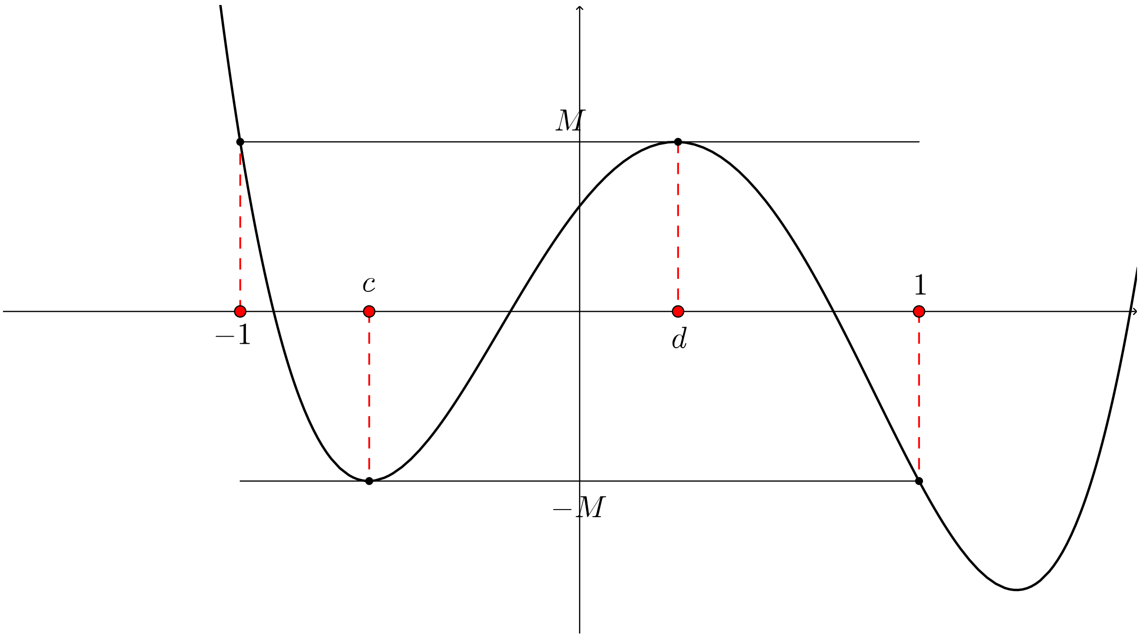


Рис. 9: Случай расположения точек локального экстремума $-1 < c < d < 1 < e$

Первый этап решения. В этом случае точками альтернанса будут

$$t_1 = -1, \quad t_2 = c, \quad t_3 = d, \quad t_4 = 1.$$

Альтернансные условия (5) принимают вид

$$P_4(x, -1) = M, \quad P_4(x, c) = -M, \quad P_4(x, d) = M, \quad P_4(x, 1) = -M.$$

Запишем подробно эту систему

$$\begin{cases} x_0 + \dfrac{4}{3}x_0(c+d+e) + 2x_0(cd+ce+de) + 4x_0cde + h = M, & (14) \\ x_0c^4 - \dfrac{4}{3}x_0(c+d+e)c^3 + 2x_0(cd+ce+de)c^2 - 4x_0c^2de + h = -M, & (15) \\ x_0d^4 - \dfrac{4}{3}x_0(c+d+e)d^3 + 2x_0(cd+ce+de)d^2 - 4x_0cd^2e + h = M, & (16) \\ x_0 - \dfrac{4}{3}x_0(c+d+e) + 2x_0(cd+ce+de) - 4x_0cde + h = -M. & (17) \end{cases}$$

Решая уравнения (14) и (17) как систему уравнений относительно x_0

и h, получим

$$x_0 = \frac{3}{4}\frac{M}{c+d+e+3cde}, \quad h = -\frac{3}{4}\frac{M(1+2cd+2ce+2de)}{c+d+e+3cde}.$$

Подставляя x_0 и h в (15) и (16), получим соответственно

$$-\frac{1}{4}\frac{M(c-1)^2\left(c^2-2cd-2ce+2c+3-4d-4e+6de\right)}{c+d+e+3cde} = 0, \tag{18}$$

$$\frac{1}{4}\frac{M(d+1)^2\left(-d^2+2cd+2de+2d-3-6ce-4c-4e\right)}{c+d+e+3cde} = 0. \tag{19}$$

Система уравнений (18), (19) эквивалентна системе

$$\begin{cases} c^2-2cd-2ce+2c+3-4d-4e+6de = 0, \\ -d^2+2cd+2de+2d-3-6ce-4c-4e = 0, \end{cases} \tag{20}$$

так как все остальные слагаемые не обращаются в ноль при заданных диапазонах изменения параметров. Решим (20) относительно c и e. Выражение для параметра c получим как решение уравнения

$$x^3 + (4-3d)\,x^2 + \left(-12d+8+3d^2\right)x + 4 + 4d^2 - 8d - d^3 = 0, \tag{21}$$

а параметр e выражается через c следующим образом

$$e = \frac{1}{2}\cdot\frac{-d^2+2cd+2d-3-4c}{-d+3c+4+4d^2-8d-d^3+2}.$$

Отметим, что в этом случае область изменения параметра e есть $(1,+\infty)$. Значению $e=+\infty$ соответствует оптимальный полином $P_4(x,t) = -MT_3(t)$ при значениях параметров $d = c = \dfrac{1}{2}$, таким образом определена правая граница области изменения параметра d, а левая граница известна из первого случая, то есть во втором случае $d \in \left(3-2\sqrt{2}, \dfrac{1}{2}\right]$.

Делая в уравнении (21) замену переменных $x = y - \dfrac{4-3d}{3}$, получим неполное уравнение третьей степени

$$y^3 + \left(-4d + \frac{8}{3}\right) y + \frac{16}{3}d - \frac{52}{27} - 4d^2 = 0. \tag{22}$$

Через p обозначим коэффициент при y, а через q — свободный член в (22)

$$p = -4d + \frac{8}{3}, \quad q = \frac{16}{3}d - \frac{52}{27} - 4d^2.$$

При данных ограничениях на параметр d справедливы неравенства

$$p > 0, \quad q < 0.$$

Значение дискриминанта

$$D = \frac{4}{27}\left(27d^2 - 34d + 11\right)(d-1)^2$$

положительно на всём промежутке изменения d. Это значит, что уравнение (22) имеет один вещественный и два комплексно сопряжённых корня. Нас интересует только вещественный корень, который получим как сумму

$$y = u + v, \quad u = -\left(\frac{q}{2} + \sqrt{D}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad v = -\frac{p}{3u}.$$

Корень исходного уравнения (21) получим после обратной замены переменных

$$x = u + v - \frac{4 - 3d}{3}.$$

Это и есть искомое выражение для параметра c. Следует отметить, что явная запись этого параметра очень громоздка, а применение разных подходов к решению уравнения (21) (выражение корней уравнения через тригонометрические функции [9, с.581], теория исключения) не помогло упростить выражение для c, что затрудняет получение явного вида полинома (6) в случае $d \in \left(3 - 2\sqrt{2}, \frac{1}{2}\right]$, а следовательно не удаётся перейти ко второму этапу решения.

2.3. Третий случай

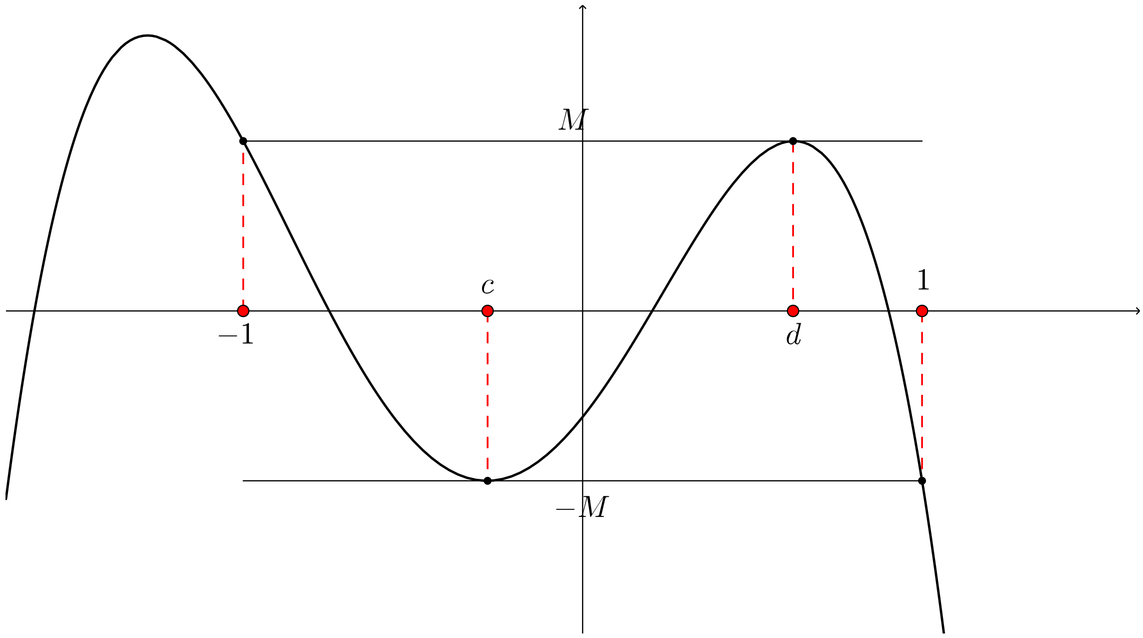


Рис. 10: Случай расположения точек локального экстремума $e < -1 < c < d < 1$

Третий случай отличается от второго только интервалами изменения параметров e и d. Все полученные формулы для x_0, h, c, e сохраняются, так как остаются теми же точки альтернанса и, следовательно, система (14)–(17).

В этом случае $e \in (-\infty, -1)$, значению $e = -\infty$ соответствует оптимальный полином $P_4(x,t) = -MT_3(t)$ и значение $d = \dfrac{1}{2}$. Правую границу изменения параметра d можем определить, заметив, что полином $-\Lambda_4(t)$ соответствует значению $e = -1$, а его вторая точка локального максимума $d = 4\sqrt{2} - 5$. Таким образом, в третьем случае $d \in \left(\dfrac{1}{2}, 4\sqrt{2} - 5\right)$.

2.4. Четвёртый случай

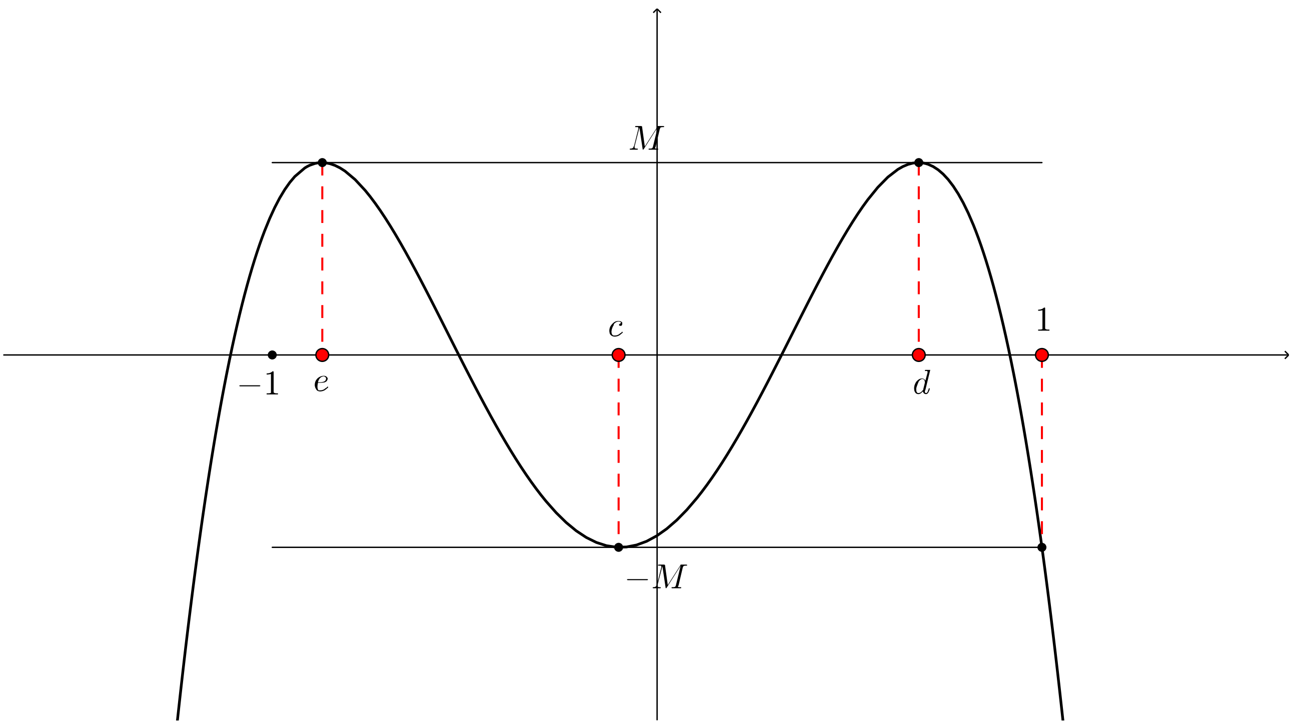


Рис. 11: Случай расположения точек локального экстремума $-1 \le e < c < d < 1$

Первый этап решения. В этом случае точками альтернанса будут

$$t_1 = e, \quad t_2 = c, \quad t_3 = d, \quad t_4 = 1.$$

Альтернансные условия (5) принимают вид

$$P_4(x, e) = M, \quad P_4(x, c) = -M, \quad P_4(x, d) = M, \quad P_4(x, 1) = -M.$$

Запишем систему подробно

$$\begin{cases} x_0 e^4 - \dfrac{4}{3} x_0 (c + d + e) e^3 + 2x_0 (cd + ce + de) e^2 - 4x_0 cde^2 + h = M, & (23) \\ x_0 c^4 - \dfrac{4}{3} x_0 (c + d + e) c^3 + 2x_0 (cd + ce + de) c^2 - 4x_0 c^2 de + h = -M, & (24) \\ x_0 d^4 - \dfrac{4}{3} x_0 (c + d + e) d^3 + 2x_0 (cd + ce + de) d^2 - 4x_0 cd^2 e + h = M, & (25) \\ x_0 - \dfrac{4}{3} x_0 (c + d + e) + 2x_0 (cd + ce + de) - 4x_0 cde + h = -M. & (26) \end{cases}$$

Вычитая (23) из (25) и факторизуя выражение, получим

$$\frac{1}{3}(d-e)^3(-d+2c-e)=0,$$

откуда выражение для e в зависимости от c и d

$$e=2c-d.$$

Подставляя выражение для e в (24) и в (25), получим систему линейных уравнений относительно x_0 и h

$$\begin{cases} \left(4d^3c-4d^2c^2-d^4\right)x_0+h=M, \\ \left(-4c^3d+2d^2c^2+c^4\right)x_0+h=-M, \end{cases}$$

которая имеет единственное решение

$$h=\frac{M\left(-4c^3d-2d^2c^2+c^4-d^4+4d^3c\right)}{(c-d)^4}, \qquad x_0=-\frac{2M}{(c-d)^4}.$$

Далее подставим полученные выражения для e, h и x_0 в (26)

$$\frac{2M(c-1)^2\left(c^2-4cd+2c-1+2d^2\right)}{(c-d)^4}=0.$$

Решая относительно c уравнение

$$c^2-4cd+2c-1+2d^2=0,$$

получим выражение для c в зависимости от d

$$c=2d-1+\sqrt{2}d-\sqrt{2},$$

и, используя его, выразим все остальные параметры через единственный параметр d

$$e = 3d - 2 + 2\sqrt{2}d - 2\sqrt{2}, \quad x_0 = -\frac{2M}{\left(d - 1 + \sqrt{2}d - \sqrt{2}\right)^4},$$

$$h = -\frac{M(-d^2 - 2d + 1 + \sqrt{2})(-d^2 - 10d + 2\sqrt{2}d + 1 - \sqrt{2})}{(d-1)^4}.$$

Подставляя их в исходный полином (6), получим

$$\begin{gathered}P_{44}(x,t) = \frac{M}{(d-1)^4}\Bigg[\left(24\sqrt{2} - 34\right)t^4 + \left[\left(80 - 56\sqrt{2}\right)d - 40\sqrt{2} + 56\right]t^3 + \\ + \left[\left(40\sqrt{2} - 60\right)d^2 + \left(88\sqrt{2} - 120\right)d + 16\sqrt{2} - 24\right]t^2 + \\ + \left[\left(16 - 8\sqrt{2}\right)d^3 + \left(72 - 56\sqrt{2}\right)d^2 + \left(48 - 32\sqrt{2}\right)d\right]t + \\ + \left[-d^4 + \left(8\sqrt{2} - 12\right)d^3 + \left(16\sqrt{2} - 18\right)d^2 - 4d + 1\right]\Bigg]. \quad (27)\end{gathered}$$

Из предыдущих рассуждений ясно, что граничными оптимальными полиномами в этом случае будут $-\Lambda_4(t)$ и $-MT_4(t)$, и тогда $d \in \left[4\sqrt{2} - 5, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

Второй этап решения. Подставляя $t = a$ в (27) и приравнивая к A, получим уравнение

$$\begin{gathered}(-M - A)\,d^4 + \left[\left(16 - 8\sqrt{2}\right)Ma + \left(8\sqrt{2} - 12\right)M + 4A\right]d^3 + \\ + \left[\left(40\sqrt{2} - 60\right)Ma^2 + \left(72 - 56\sqrt{2}\right)Ma + \left(16\sqrt{2} - 18\right)M - 6A\right]d^2 + \\ + \left[\left(80 - 56\sqrt{2}\right)Ma^3 + \left(88\sqrt{2} - 120\right)Ma^2 + \left(48 - 32\sqrt{2}\right)Ma - 4M + 4A\right]d + \\ + \left(24\sqrt{2} - 34\right)Ma^4 + \left(56 - 40\sqrt{2}\right)Ma^3 + \left(16\sqrt{2} - 24\right)Ma^2 + \\ + M - A = 0. \quad (28)\end{gathered}$$

В этом случае при всех допустимых d $A < -M$, поэтому можно разделить (28) на коэффициент при d^4 и перейти к уравнению вида

$$d^4 + b_1 d^3 + c_1 d^2 + d_1 d + e_1 = 0,$$

где

$$b_1 = -\frac{1}{M+A}\Big[\left(16 - 8\sqrt{2}\right) Ma + \left(8\sqrt{2} - 12\right) M + 4A\Big],$$

$$c_1 = -\frac{1}{M+A}\Big[\left(40\sqrt{2} - 60\right) Ma^2 + \left(72 - 56\sqrt{2}\right) Ma + \\ + \left(16\sqrt{2} - 18\right) M - 6A\Big],$$

$$d_1 = -\frac{1}{M+A}\Big[\left(80 - 56\sqrt{2}\right) Ma^3 + \left(88\sqrt{2} - 120\right) Ma^2 - \\ - \left(48 - 32\sqrt{2}\right) Ma - 4M + 4A\Big],$$

$$e_1 = -\frac{1}{M+A}\Big[\left(24\sqrt{2} - 34\right) Ma^4 + \left(56 - 40\sqrt{2}\right) Ma^3 - \\ - \left(16\sqrt{2} - 24\right) Ma^2 + M - A\Big].$$

С помощью замены $d = x - \dfrac{b_1}{4}$ перейдём к неполному уравнению четвёртой степени вида

$$x^4 + p_1 x^2 + q_1 x + r_1 = 0,$$

где

$$p_1 = -\frac{4M\left(2\sqrt{2} - 3\right)(5A - 7M)(a-1)^2}{(M+A)^2},$$

$$q_1 = \frac{8M\left(7\sqrt{2} - 10\right)(A - M)(A - 7M)(a-1)^3}{(M+A)^3},$$

$$r_1 = -\frac{2M\left(12\sqrt{2} - 17\right)\left(-31M^3 + 51M^2A - 13MA^2 + A^3\right)(a-1)^4}{(M+A)^4}.$$

Для этого уравнения составим кубическую резольвенту Феррари

$$y^3 - p_1 y^2 - 4r_1 y + \left(4p_1 r_1 - q_1^2\right) = 0.$$

Делая в ней замену переменных $y = z + \frac{p_1}{3}$, перейдём к неполному уравнению третьей степени

$$z^3 + p_2 z + q_2 = 0,$$

где

$$p_2 = \frac{8M\left(12\sqrt{2} - 17\right)(3A + 5M)(a-1)^4}{3(M+A)^2},$$

$$q_2 = \frac{64M^2\left(70\sqrt{2} - 99\right)(9A + 7M)(a-1)^6}{27(M+A)^3},$$

дискриминант которого

$$D = \frac{512M^3\left(13860\sqrt{2} - 19601\right)(A-M)^2(a-1)^{12}}{27(M+A)^5}$$

всюду положителен, а следовательно кубическая резольвента Феррари имеет один вещественный корень, который вычисляется по формуле

$$y = u + v + \frac{p_1}{3}, \quad u = \left(-\frac{q_2}{2} + \sqrt{D}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad v = -\frac{p_2}{3u}.$$

Используя его, найдём корень исходного уравнения четвёртой степени (28)

$$d = \frac{-K - \sqrt{K^2 - 4\left(\frac{y}{2} + L\right)}}{2}, \quad K = \sqrt{y - p_1}, \quad L = -\frac{q_1}{2K}.$$

Таким образом задача в четвёртом случае полностью решена. Подставляя полученное выражение для d в (27), все коэффициенты искомого полинома выражаются через параметры A, a, M исходной задачи (1)–(3).

2.5. Функции $A(d)$ и $B(d)$

В параграфах 2.2 и 2.3 не удалось получить явные формулы зависимости $d(A)$, однако получен график зависимости $A(d)$, по которому можно судить о характере изменения параметра A в зависимости от d. Из графика видно, что $A(d)$ монотонно убывает, а его производная ни в одной точке не обращаеся в нуль и, следовательно, существует обратная функция.

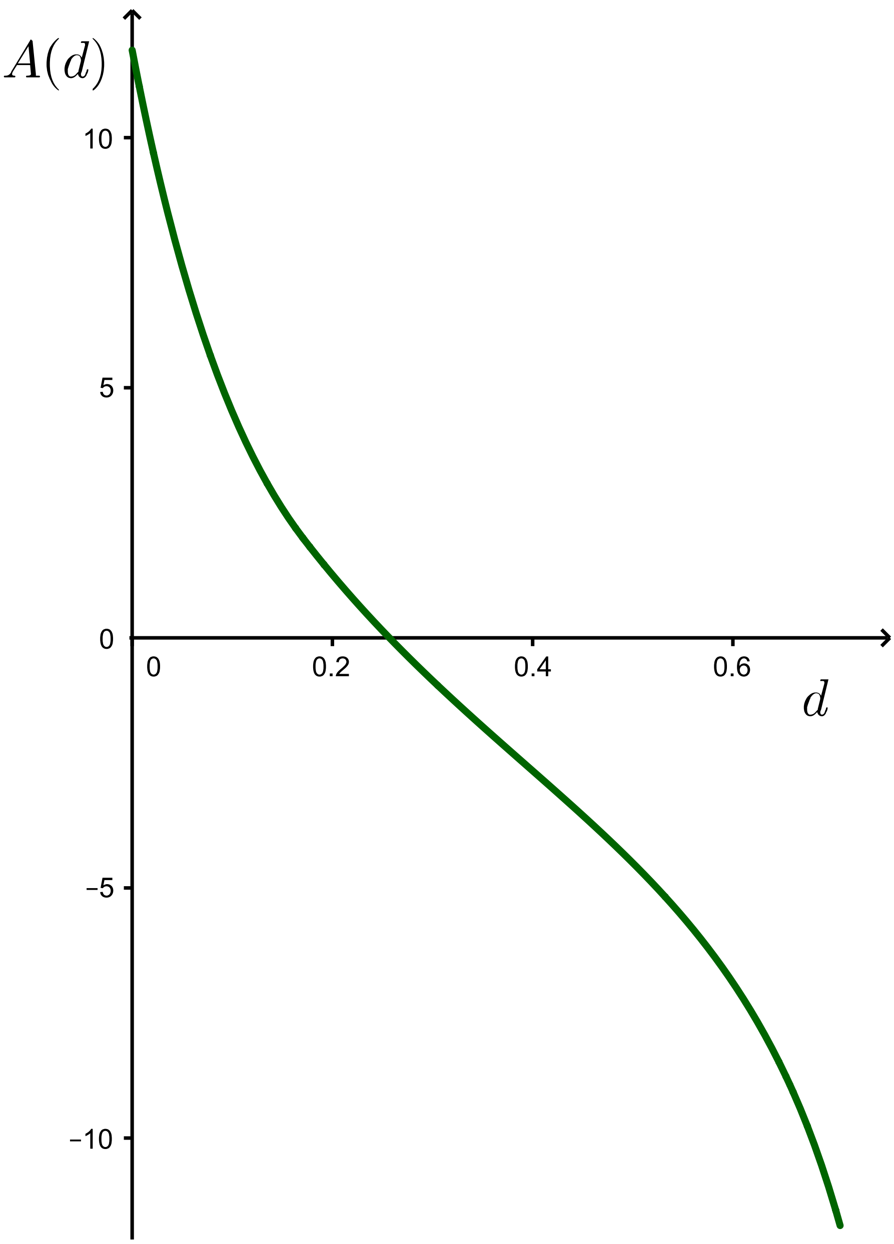


Рис. 12: График функции $A(d), M = 0.5, a = 1.5$

Также построен график целевой функции поставленной задачи $B(d) = P_4^*(x, b)$, где $P_4^*(x, t)$ — оптимальный полином. Отметим, что задача максимизации вырождена, потому что полином, найденный с помощью утверждения 2 и удовлетворяющий условию (3), определяется единственным образом.

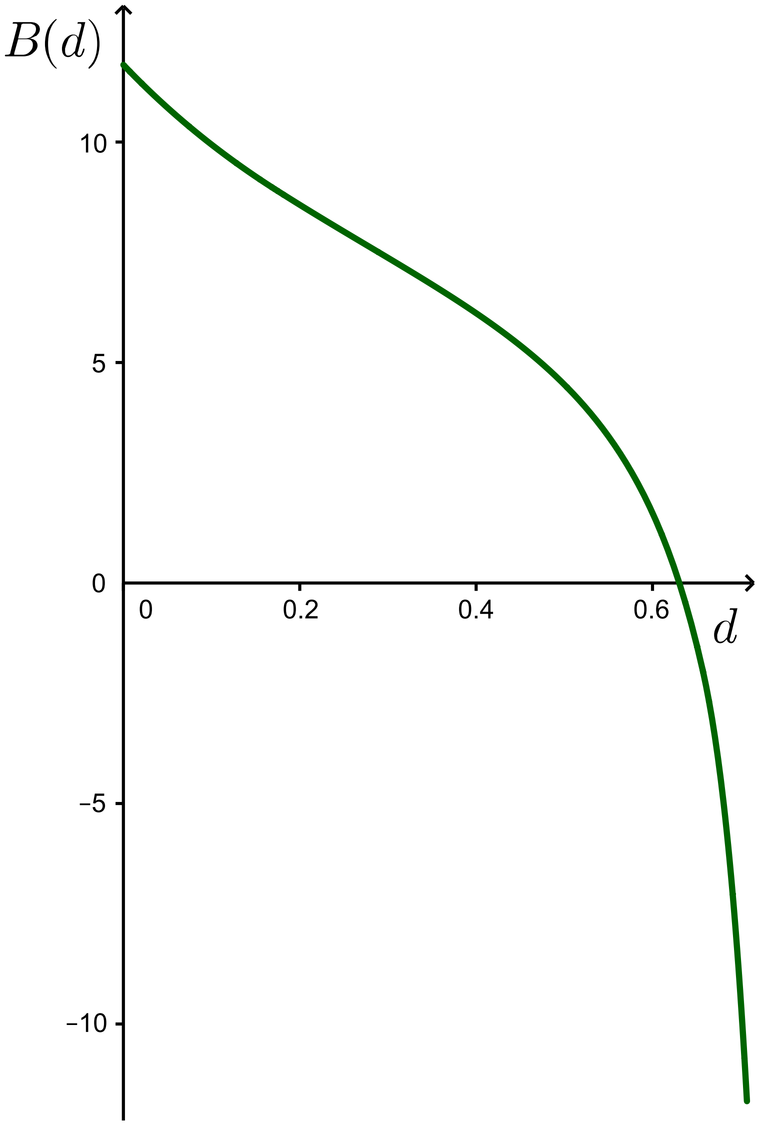


Рис. 13: График функции $B(d), M = 0.5, b = -1.5$

Заключение

В данной работе поставлена и исследована полиномиальная фильтровая задача при $n = 4$, где n — степень искомого полинома. В ходе анализа исходная задача была сведена к рассмотрению четырёх возможных случаев расположения точек локального экстремума, для двух из которых задачу удалось полностью решить, в то время как для двух других удалось реализовать только первый этап решения.

С помощью программного пакета GeoGebra построены три анимированных графика. Два из них иллюстрируют изменение оптимального полинома в зависимости от параметра A для первого и четвёртого случая соответственно, третий — изменение оптимального полинома в зависимости от параметра d для всех случаев.

В силу особенностей поставленной задачи, полученные результаты не представляется возможным обобщить на случай более высокой степени фильтровой задачи.

Следует отметить, что данная задача имеет взаимосвязь со второй задачей Золотарёва [10, 11].

Список литературы

[1] Тамасян Г. Ш. Этюд на тему полиномиальной фильтровой задачи ($n = 1, 2$) [Электронный ресурс] // Семинар «CNSA & NDO». Избранные доклады. 27 ноября 2014 г. http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/pdf/2014/Filtr_n12.pdf

[2] Малозёмов В. Н., Тамасян Г. Ш. Этюд на тему полиномиальной фильтровой задачи ($n = 3$) [Электронный ресурс] // Семинар «CNSA & NDO». Избранные доклады. 12 марта 2015 г. http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/pdf/2015/Filtr_n3.pdf

[3] Ежова Е. В. О разрешимости в аналитическом виде одной полиномиальной фильтровой задачи // Процессы управления и устойчивость: Труды 48-й международной научной конференции аспирантов и студентов / под ред. А. С. Ерёмина, Н. В. Смирнова, Т. Е. Смирновой. СПб.: Издат. Дом С.-Петерб. гос. ун-та, 2017.

[4] Золотарёв Е. И. Приложение эллиптических функций к вопросам о функциях, наименее и наиболее отклоняющихся от нуля / В кн.: Золотарёв Е. И. Полное собрание сочинений. Выпуск второй. Л.: Изд-во АН СССР, 1932. С. 1–59.

[5] Малозёмов В. Н. Что даёт информация об альтернансе [Электронный ресурс] // Семинар «CNSA & NDO». Избранные доклады. 28 августа 2014. http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/pdf/2014/InfoAlter.pdf

[6] Данилов Ю. А. Многочлены Чебышёва. Минск: Высшая школа, 1984. 157 с.

[7] Агафонова И. В., Малозёмов В. Н. Об одной экстремальной задаче, связанной с полиномами Золотарёва // Семинар «CNSA & NDO». Избранные доклады. 13 ноября 2014 г. http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/pdf/2014/OneExstrProblem.pdf

[8] Утешев А. Ю. Полином одной переменной [Электронный ресурс] http://pmpu.ru/vf4/polynomial

[9] Смирнов В. И. Курс высшей математики. Том 1. СПб: БХВ-Петербург, 2008. 624 с.

[10] Пежиров И. А. Решение второй задачи Золотарёва при $n = 4$ // Процессы управления и устойчивость: Труды 48-й международной научной конференции аспирантов и студентов / под ред. А. С. Ерёмина, Н. В. Смирнова, Т. Е. Смирновой. СПб.: Издат. Дом С.-Петерб. гос. ун-та, 2017.

[11] Грунина В. Н. О взаимосвязи решений второй задачи Золотарёва и полиномиальной задачи // Процессы управления и устойчивость: Труды 48-й международной научной конференции аспирантов и студентов / под ред. А. С. Ерёмина, Н. В. Смирнова, Т. Е. Смирновой. СПб.: Издат. Дом С.-Петерб. гос. ун-та, 2017.